Lycée M$^{ed}$ Reda Slaoui
Centre Des Classes Préparatoires
Agadir

Année Scolaire : 04/05
BCPST 1

# Devoir surveillé n°5

18/03/2005

Durée 2heures

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.

## Exercice 1

### Partie A

Dans cette exercice $x$ désigne une variable réelle appartenant à l'intervalle $I = [0, 1]$

1. Déterminer des constantes $a, b, c$ et $d$ telles que :
$$\frac{4}{(1-x^2)^2} = \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-x} + \frac{d}{1+x}$$
2. En déduire que
$$\int_0^x \frac{4}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2x}{1-x^2} + \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

### Partie B

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre
$$(1-x^2)y'' + 2y + 4x = 0 \qquad (1)$$
où $y$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable $x$ sur $I$. Cette partie propose une méthode de recherche des solutions de (1).

1. Déterminer une solution particulière polynômiale $y_p$ de (1), de la forme $\alpha x + \beta$.
2. On effectue dans (1) le changement de fonction inconnue
$$y = (1-x^2)z - 2x$$
où $z$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable $x$ sur $I$.
Former l'équation différentielle (2) vérifiée par $z$.
3. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$(1-x^2)u' - 4xu = 0 \qquad (3)$$
où $u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable $x$ sur $I$.
Déterminer ses solutions sur $I$.
4. En déduire les solutions générales de (2), puis les solutions de (1).

## Exercice 2

Soit $U$ une fonction de deux variables, $x$ et $y$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On suppose que $U$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(E): \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On effectue le changement de variable $X = x^2 - y$ , $Y = x^2 + y$; la fonction $U(x,y)$ devient une fonction $\varphi(X,Y)$.

Montrer que $(E) \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial Y} = 0$, en déduire la solution de $(E)$.

## Exercice 3

Le mouvement d'un point pesant soumis à une résistance du milieu est défini par l'équation différentielle

$$mv' = -kv^2 + mg \qquad (E)$$

où $v$ est la vitesse du point pesant de masse $m$, $-k$ représente la résistance du milieu. ( On suppose dans tout ce qui suit $k \neq 0$).

1. Rechercher la solution particulière $v_0$ de l'équation différentielle $(E)$, telle que $v_0$ soit une constante.
   Dans les questions suivantes, on suppose : $m = \frac{1}{2}$, $g = 10$ et $k = 5$.
2. En posant $v = V + v_0$, où $v_0$ est la valeur déterminée au 1., montrer que $V$ vérifie l'équation différentielle
   $$V' + 20V + 10V^2 = 0 \qquad (1)$$
3. En posant $u = \frac{1}{V}$ dans l'equation différentielle (1), montrer que $u$ vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, notée (2).
4. Intégrer (2), puis déterminer $u$, $V$ et $v$ telles qu'en $t = 0$, $v(0) = 2$.

## Exercice 4

Soit $f$ la fonction de deux variables définie par :

$$\frac{1}{f(x,y)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. Déterminer l'incertitude absolue $\triangle f(x,y)$ en fonction des incertitudes absolues sur $x$ et $y$.
2. Sachant que $x = 4 \pm 0.01$ et $y = 8 \pm 0.02$, calculer l'incertitude absolue et l'incertitude relative sur $f(x,y)$.